

Varianata 40

Subiectul I

- a) $AB = \sqrt{5}$.
- b) $\sin 60^\circ + \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.
- c) $S_{ABC} = 6\sqrt{3}$.
- d) $A_t = 54$.
- e) $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4} \Rightarrow$ dreptele sunt paralele.
- f) $\cos A = \frac{1}{2}$.

Subiectul II

1.

- a) $x_1 = 1, x_2 = -3$.
- b) $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- c) $p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
- d) $a = 8$.
- e) $e = 5$.

2.

- a) $f(x) = 1 + \frac{1}{x+2}, \forall x \in (-2, \infty)$.
- b) $f'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}, \forall x > -2$.
- c) $f'(x) < 0, \forall x > -2 \Rightarrow$ funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-2, \infty)$.
- d) $\int_0^1 f(x) dx = 1 + \ln \frac{3}{2}$.
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 1$.

Subiectul III

- a) $\det A = 0$.
- b) $A^2 = A, B^2 = B$.
- c) $A \cdot B = B \cdot A = O_2$.

d) $C(x) \cdot C(y) = (xA + B) \cdot (yA + B) = xyA + B = C(xy) = C(yx) = C(y) \cdot C(x).$

e) $C(x) = xA + B = \begin{pmatrix} -x+2 & -2x+2 \\ x-1 & 2x-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det C(x) = x.$

f) $(C(x))^2 = C(x) \cdot C(x) = C(x \cdot x) = C(x^2).$

g) Vom demonstra prin inducție că $C^n(x) = C(x^n), \forall n \in \mathbf{N}^*; \forall x \in \mathbf{R}.$

Pentru $n = 1$ avem $C^1(x) = C(x^1) \Rightarrow C(x) = C(x)$ -adevărat.

Presupunem adevărat pentru $n = k$ deci $C^k(x) = C(x^k), k \in \mathbf{N}^*$

și vom demonstra că $C^{k+1}(x) = C(x^{k+1}).$

Dar $C^{k+1}(x) = C^k(x) \cdot C(x) = C(x^k \cdot x) = C(x^{k+1}).$ Folosind metoda inducției matematice rezultă că $C^n(x) = C(x^n), \forall n \in \mathbf{N}^*; \forall x \in \mathbf{R}.$

Subiectul IV

a) $f'_n(x) = (1+x)^n + x \cdot n(1+x)^{n-1} = (1+x)^{n-1}(1+x+nx).$

b) $f'_2(x) = 0 \Leftrightarrow (1+x)(1+x+2x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{3}.$

c) Din tabelul de variație rezultă $x = -1$ punct de maxim local și $x = -\frac{1}{3}$ punct de minim local.

d) $x \in [0, 1] \Rightarrow 1 \leq 1+x \leq 2 \Rightarrow (1+x)^n \leq (1+x)^{n+1} \Rightarrow f_n(x) \leq f_{n+1}(x); x \in [0, 1]; n \in \mathbf{N}^*.$

e) $\int_0^1 x(1+x)^n dx = \int_0^1 (1+x)^{n+1} dx - \int_0^1 (1+x)^n dx = \frac{(x+1)^{n+2}}{n+2} \Big|_0^1 - \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 =$
 $\frac{2^{n+2}}{n+2} - \frac{1}{n+2} - \frac{2^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} = \frac{n \cdot 2^{n+1} - 1}{(n+1)(n+2)}.$

f) $f_n(x) = x(C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n) = C_n^0 x + C_n^1 x^2 + \dots + C_n^n x^{n+1}.$

g) $\int_0^1 x(1+x)^n dx = \int_0^1 (C_n^0 x + C_n^1 x^2 + \dots + C_n^n x^{n+1}) dx =$
 $= \left(C_n^0 \frac{x^2}{2} + C_n^1 \frac{x^3}{3} + \dots + C_n^n \frac{x^{n+2}}{n+2} \right) \Big|_0^1 = \frac{C_n^0}{2} + \frac{C_n^1}{3} + \dots + \frac{C_n^n}{n+2}. \quad (1)$

Din punctul e) avem $\int_0^1 x(1+x)^n dx = \frac{n \cdot 2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}. \quad (2)$

Din (1) și (2) rezultă $\frac{C_n^0}{2} + \frac{C_n^1}{3} + \dots + \frac{C_n^n}{n+2} = \frac{n \cdot 2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}.$